Animation physique

SIA Ensimag 3A

Estelle Duveau

Plan

Plan

Animation 3D pour quoi?

- Crédibilité vs Expressivité

- Réalisme vs Contrôlabilité

Animation physique

- **Modèle générateur**
- L'utilisateur définit :
  - Modèle
  - Conditions initiales
  - Forces appliquées
- Les **lois du mouvement** en dérivent un mouvement
- Exemple : principe fondamental de la dynamique :

$$\sum f = ma$$

$\Rightarrow$ **Réalisme**

Plan

Plan

Equations différentielles

- Forme générique d'une ODE premier degré :

$$\frac{dX(t)}{dt} = F(X(t), t)$$

- Au mieux : résolution analytique
- Nombreux problèmes sans solution analytique
  $\Rightarrow$ Résolution numérique
- Résolution numérique :

$$X(t_0) = X_0$$

$$\frac{dX(t)}{dt} = F(X(t), t) \quad t > t_0$$

Dans notre cas

- Application à la 2ème loi de Newton :

$$\frac{d^2}{dt^2}x = \frac{f}{m}$$

- On se ramène à une ODE d'ordre 1 :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = v(t) \\ \frac{d}{dt}v(t) = \frac{1}{m}f(x, v, t) \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \quad F(X, t) = \begin{pmatrix} v \\ \frac{f(x,v,t)}{m} \end{pmatrix}$$

Méthode d'Euler

- Méthode la plus intuitive
- Pas de temps donné h
- Avancer d'un pas :

$$t_{i+1} = t_i + h$$

$$X(t_{i+1}) = X(t_i) + hF(X(t_i), t_i)$$

- $\Rightarrow$ Approximation linéaire par morceau de la trajectoire : précision en $O(h)$
- Ordres supérieurs :
  - Méthode du trapèze (ordre 2)
  - Méthode du point milieu (ordre 2)
  - Méthode de Runge-Kutta (ordres plus élevés)

Méthodes explicites

- Pas de temps trop grand : simulation instable
- Pas de temps trop petit : ça n'avance pas!
- Pas variable automatique
  1. Pas initial h
  2. **Estimer l'erreur commise**
  3. Si l'erreur est petite : valider le résultat (et augmenter h)
  4. Si le résultat n'est pas validé : **diminuer** h et recommencer le calcul

Euler implicite

- Connu : $X(t_i), t_i, t_{i+1} = t_i + h$
- Inconnues : $X(t_{i+1})$
- Euler explicite :

$$X(t_{i+1}) = X(t_i) + hF(X(t_i), t_i)$$

- Euler implicite :

$$X(t_{i+1}) = X(t_i) + hF(X(t_{i+1}), t_{i+1})$$

$\Rightarrow X(t_{i+1})$ définie par une équation implicite

Bilan

- Euler explicite : très simple, plus ou moins rapide, instable
- Euler variable : simple, lent, stable
- Euler implicite : compliqué, rapide, stable
- Problème précision

Plan

Une particule

- **Masse m, position p, vitesse v**

- Loi de la dynamique : $f = m\dot{v} \Leftrightarrow \frac{dX(t)}{dt} = F(X(t), t)$ avec

$$X = \begin{pmatrix} p \\ v \end{pmatrix} \quad F(X, t) = \begin{pmatrix} v \\ \frac{1}{m} f(X, t) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ **ODE d'ordre 1**

- La concaténation de p et v est appelée la position dans l'espace des phases.

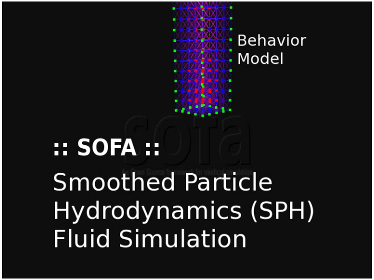
- Pour chaque particule, on stocke (p, v, m, f).

Un système de particules

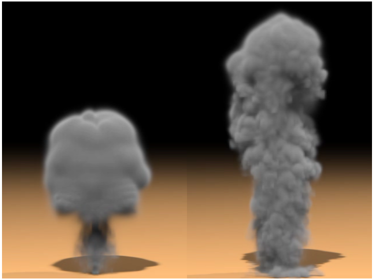
- Ensemble de particules (p^i, v^i, m^i, f^i)
- Générateur : source de particules
- Durée de vie limitée
- Loi de la dynamique :

$$\frac{dX(t)}{dt} = F(X(t), t) \quad ; \quad X = \begin{pmatrix} p_x^0 \\ p_y^0 \\ p_z^0 \\ v_x^0 \\ v_y^0 \\ v_z^0 \\ p_x^1 \\ p_y^1 \\ p_z^1 \\ v_x^1 \\ v_y^1 \\ v_z^1 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad F(X, t) = \begin{pmatrix} v_x^0 \\ v_y^0 \\ v_z^0 \\ \frac{1}{m} f_x^0(X, t) \\ \frac{1}{m} f_y^0(X, t) \\ \frac{1}{m} f_z^0(X, t) \\ v_x^1 \\ v_y^1 \\ v_z^1 \\ \frac{1}{m} f_x^1(X, t) \\ \frac{1}{m} f_y^1(X, t) \\ \frac{1}{m} f_z^1(X, t) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

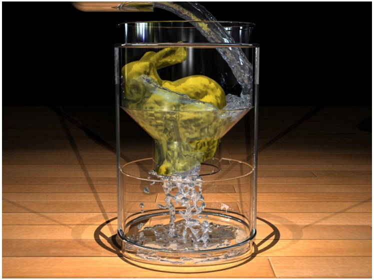
Applications



Sofa



Selle et al, Siggraph 2005



Lenaerts et al, Siggraph 2008

Solenthaler et al, Siggraph 2009

Systèmes masses-ressorts

- Idem systèmes de particules

- **Masses :**
  - particules appelées masses
  - modèle donné : pas de création, pas d'âge, pas de destruction

- **Ressorts :**
  - chaque ressort relie 2 masses
  - définis dans le modèle

- Loi de la dynamique :

$$\frac{dX(t)}{dt} = F(X(t), t) \quad ; \quad X = \begin{pmatrix} p \\ v \end{pmatrix} \quad F(X, t) = \begin{pmatrix} v \\ \frac{1}{m} f(X, t) \end{pmatrix}$$

Ressorts

- **Ressort amorti** entre 2 masses : $\Delta x = x^j - x^i$

$$f(x^i, x^j, v^i, v^j) = -k(\|\Delta x\| - l)\frac{\Delta x}{\|\Delta x\|} + \nu(\frac{(v^j - v^i).\Delta x}{\|\Delta x\|})\frac{\Delta x}{\|\Delta x\|}$$

- 3ème loi de Newton : $f(x^j, x^i) = -f(x^i, x^j)$
- force radiale
- **ressort** : pousse/tire les masses à une distance l l'une de l'autre
- **amorti** : ralentit les mouvements dans la direction du ressort

Points en ligne

Cheveux, ressorts, chaînes, ...

Selle et al, Siggraph 2008

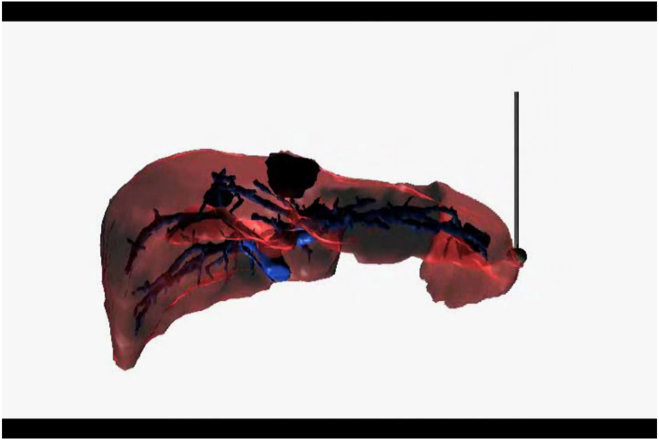
Points sur une surface

Habits, tissus, peau, ...

Baraff et al, Siggraph 2003

Points dans un réseau 3D

Structures semi-rigides, modèles souples, muscles, ...



Nesme et al, Siggraph 2009

Plan

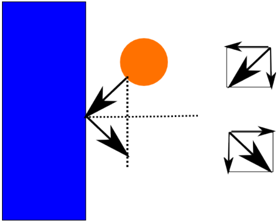
Traitement des collisions

Processus :

1. Détection des pénétrations
2. Modélisation du contact
3. Réponse aux collisions

Réponse à une collision :

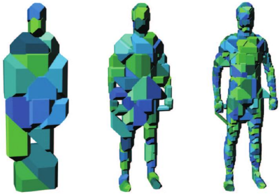
- Forces de pénalité
- Impulsion :
  - Vitesse tangentielle inchangée
  - Vitesse normale retournée

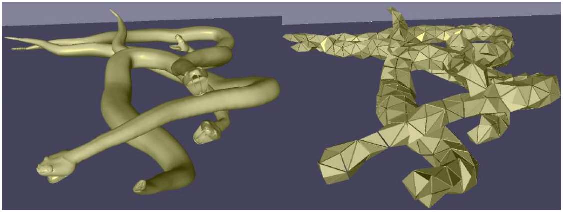


Détection des collisions?

Détection des collisions

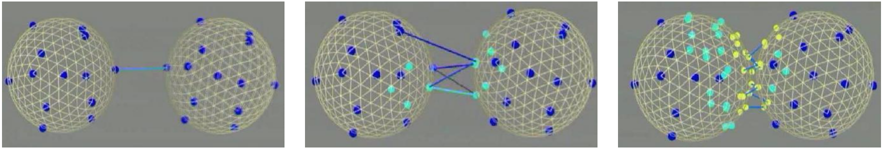
- **Volumes englobants** : Non-intersection des volumes englobants $\Rightarrow$ non-intersection des objets
- Encore mieux : **hiérarchie de volumes englobants** : plus rapide mais mise-à-jour de la hiérarchie coûteuse pour les objets déformables
- **Multirésolution** : plonger une géométrie complexe dans une géométrie plus grossière



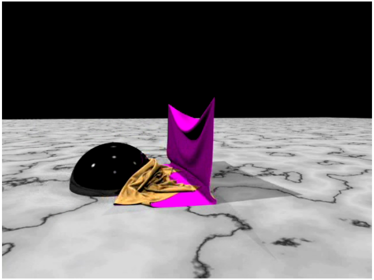


Détection des collisions

- **Discrétisation de l'espace** : plonger les objets dans une grille de l'espace : tester les objets d'une même case ou de cases voisines $\Rightarrow$ diminue le nombre de paires d'objets à tester
- **Méthodes stochastiques** :
  - Tester la distance entre paires d'arêtes aléatoires
  - Raffiner les tests aux endroits où les objets sont proches



Exemples



Robert Bridson

Plan

Plan

But

- Une particule :

$$\frac{dX(t)}{dt} = F(X(t), t) \quad ; \quad X = \begin{pmatrix} p \\ v \end{pmatrix} \quad F(X,t) = \begin{pmatrix} v \\ \frac{1}{m} f(X,t) \end{pmatrix}$$

- Equivalent pour un **solide**?

Position et orientation

- Un solide a, en plus d'une position, une **orientation** : $x(t)$ et $R(t)$
- **Hypothèse** : centre de masse en $(0,0,0)$ dans le repère objet
  $\Rightarrow x(t) =$ **position** du centre de masse dans le repère monde
  $\Rightarrow R(t)(1,0,0)^T =$ **direction** de l'axe X du solide dans le repère monde
- Si p_0 un point du solide, dans le repère monde :

$$p(t) = R(t)p_0 + x(t)$$

- Comment ces quantités **varient**-elles au cours du temps?

Vitesse linéaire

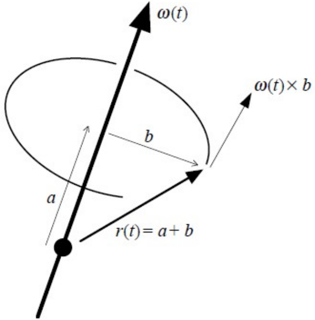
- $v(t) = \dot{x}(t) =$ **vitesse linéaire**
- Si l'orientation du solide est fixe, le solide subit une translation pure de vitesse $v(t)$

Vitesse angulaire

- *Hypothèse* : position fixe
  $\Rightarrow$ tout mouvement est dû à une rotation autour du centre de masse décrit par une vecteur $\omega(t)$
- $\omega(t)$ donne l'**axe** autour duquel le solide tourne
- $\|\omega(t)\|$ indique la **vitesse** à laquelle le solide tourne
- $\omega(t)$ = **vitesse angulaire**
- Comment sont liées $R(t)$ et $\omega(t)$?

Vitesse angulaire

- Soit $r(t)$ une direction fixe par rapport au solide
- $r(t) = a + b$ avec $a // \omega(t)$ et $b \perp \omega(t)$
- La pointe de $r(t)$ décrit un cercle de rayon $\|b\|$ autour de $\omega(t)$
- $r(t)$ varie perpendiculairement à $\omega(t)$ et b
- La vitesse de $r(t)$ a comme magnitude $\|b\| \, \|\omega(t)\|$
- $\Rightarrow \dot{r}(t) = \omega(t) \times b$
  $\dot{r}(t) = \omega(t) \times (a + b) = \omega(t) \times r(t)$
- Appliqué aux colonnes de $R(t)$:
  $\dot{R}(t) = \omega(t) * R(t)$
  où $a*$ est la matrice telle que $a * b = a \times b$



Application à un point du solide

$$p(t) = R(t)p0 + x(t)$$

$$\dot{p}(t) = \omega(t) * R(t)p_0 + v(t)$$

$$\dot{p}(t) = \omega(t) * (R(t)p_0 + x(t) - x(t)) + v(t)$$

$$\dot{p}(t) = \omega(t) \times (p(t) - x(t)) + v(t)$$

Force et torque

- Une **force** $F(t)$ agit en un point particulier du solide $p(t)$
- **Torque** = **moment de force** $= \tau(t) = (p(t) - x(t)) \times F(t)$
- Direction de $\tau(t)$ = axe autour duquel le solide tourne en conséquence de $F(t)$

Moment linéaire

- Pour une particule : $p = mv$
- Pour un solide : $P(t) = \sum m_i \dot{p}_i(t)$
- En utilisant les équations dérivées précédemment :

  $$P(t) = \sum m_i v(t) + \omega(t) \times \sum m_i (p_i(t) - x(t)) = \sum m_i v(t) = Mv(t)$$

  par définition du centre de masse
- 2ème loi de Newton : $F(t) = \dot{P}(t)$

Moment angulaire

- Notion peu intuitive, surtout pour simplifier équations
- $L(t) = I(t)\omega(t)$ par analogie avec le moment linéaire
- $I(t)$ est une matrice 3x3 appelée **matrice d'inertie** qui décrit la manière dont la masse est distribuée sur le solide
- On peut dériver : $\dot{L}(t) = \dot{\tau}(t)$

Tenseur d'inertie

$$I(t) = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & Ixz \\ I_{yx} & I_{yy} & Iyz \\ I_{zx} & I_{zy} & Izz \end{pmatrix}$$

où $I_{xx} = \sum m_i(y * y + z * z)$ et $I_{xy} = \sum -m_i x * y$

que l'on peut ré-écrire si $I_{body} = I(0)$ en :

$$I(t) = R(t) I_{body} R(t)^T$$

$\Rightarrow$ **pré-calcul** de I_{body}

Equations du mouvement

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ R(t) \\ P(t) \\ L(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ R(t) \\ Mv(t) \\ I(t)\omega(t) \end{pmatrix}$$

M et I_{body} **pré-calculées**

$$\frac{dX(t)}{dt} = \begin{pmatrix} v(t) \\ \omega(t) * R(t) \\ F(t) \\ \tau(t) \end{pmatrix}$$

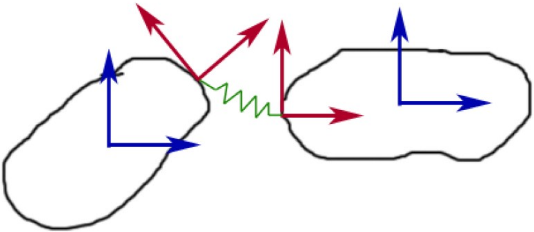
Plan

Modélisation

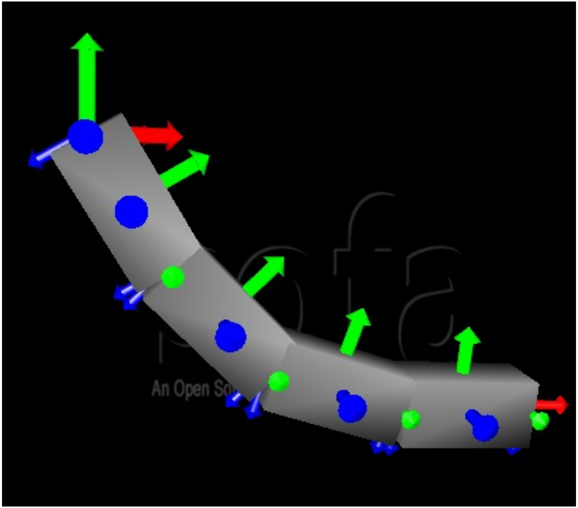
- Ensemble de **solides** avec des **contraintes aux articulations**
- Comment maintenir les contraintes aux articulation?
  - Calcul exact pour les chaînes ouvertes
  - Multiplicateurs de Lagrange
  - Correction itérative des positions
  - Ressorts
  - ...

Application : squelette d'animations

- Os = solide
- Articulation = *ressort angulaire*



Exemples

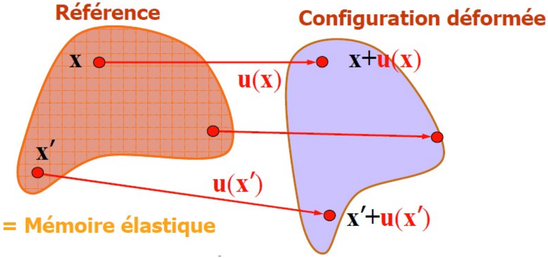


Plan

Plan

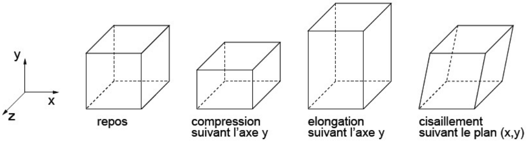
Champ de déplacement

- Contrairement aux solides, la forme ne peut pas être décrite par une position et une orientation
- **Champ de déplacement** = champ de vecteurs = $u(x) = x(t) - x(0)$



Déformations

- Différents types de déformations :



- Mesure de la déformation donnée par le jacobien :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{d(x+u_x)}{dx} & \frac{d(x+u_x)}{dy} & \frac{d(x+u_x)}{dz} \\ \frac{d(y+u_y)}{dx} & \frac{d(y+u_y)}{dy} & \frac{d(y+u_y)}{dz} \\ \frac{d(z+u_z)}{dx} & \frac{d(z+u_z)}{dy} & \frac{d(z+u_z)}{dz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\frac{du_x}{dx} & \frac{du_x}{dy} & \frac{du_x}{dz} \\ \frac{du_y}{dx} & 1+\frac{y+du_y}{dy} & \frac{du_y}{dz} \\ \frac{du_z}{dx} & \frac{du_z}{dy} & 1+\frac{du_z}{dz} \end{pmatrix}$$

- On peut écrire cela comme :

$$J = I + grad(u)$$

Tenseur de déformations

- **Tenseur de déformation** = description locale de l'état de déformation en un point de l'objet
- Exprimé comme :

$$[\epsilon] = \begin{pmatrix} \epsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \epsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \epsilon_z \end{pmatrix}$$

  ou sous forme condensée :

$$\{\epsilon\} = [\epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z \gamma_{xy} \gamma_{xz} \gamma_{yz}]$$

- ϵ_i représente l'**étirement** suivant l'axe i
- γ_{ij} représente le **cisaillement** entre les axes i et j

Tenseur de déformations de Green-Lagrange

- **Mesure de la déformation** : changements de longueur entre 2 points de l'objet entre son état de repos et son état déformé
$\Rightarrow$ Déformation pure, indépendante du déplacement rigide
- $\|dx(t)\|^2 - \|dx(0)\|^2 = dx(t)^T.dx(t) - dx(0)^T.dx(0)$
avec $dx(t) = Jdx(0)$
- soit $\|dx(t)\|^2 - \|dx(0)\|^2 = dx(0)^T(J^TJ - I)dx(0)$
- **Tenseur de Green-Lagrange** $= \epsilon_{Green} = \frac{1}{2}(J^TJ - I)$
- Or : $J = I + grad(u)$ donc :

$$\epsilon_{Green} = \frac{1}{2}(grad(u) + grad^T(u) + grad(u)^T grad(u))$$

Tenseur de déformations de Cauchy

- **Tenseur de Cauchy** = linéarisation du tenseur de Green-Lagrange
- $\epsilon_{Cauchy} = \frac{1}{2}(grad(u) + grad^T(u))$
- Non-invariant en rotation
- Valide pour des **petits déplacements** pour lesquels les termes quadratiques sont négligeables
- Pour de grands déplacements : par exemple, rotation de 90° en 2D : $u = -X - Y$, $v = X - Y$,

$$grad(u)^T grad(u) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Plan

Tenseur de contraintes

- La déformation entraîne des efforts intérieurs modélisés par des contraintes
- Contrainte représentée par une matrice 3x3 appelée **tenseur de contraintes** $[\sigma]$
- La plus souvent utilisée : **loi d'Hooke** :

$$[\sigma] = \lambda tr([\epsilon])I + 2\mu\,[\epsilon]$$

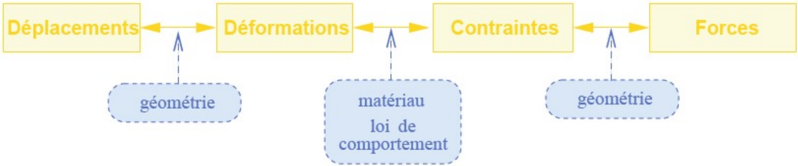
  exprimable en :

$$\{\sigma\} = D\,\{\epsilon\}$$

- $\Rightarrow$ **Relation linéaire** entre tenseur de contraintes et tenseur de déformations
- λ et μ exprimable en fonction du **module de Young** (rigidité du matériau) et le **coefficient de Poisson** (compressibilité)
- **Force associée** : $F = [\sigma]\,ndS$ sur un morceau de surface

Plan

Equations du mouvement

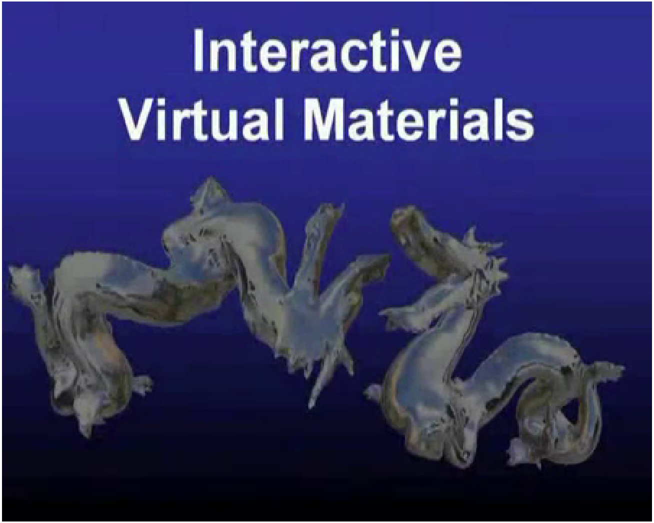


- **Modèle linéaire** : tenseur de Cauchy avec loi de Hooke :
  $f = Ku = K\Delta x$ où K est la matrice de rigidité
- **Modèle de St-Venant-Kirchoff** : tenseur de Green-Lagrange avec loi de Hooke :
  $f = F(x)$, système non-linéaire approprié aux grands déplacements
- **Déformation statique** : $\Delta x = K^{-1}f$, $x = F^{-1}(f)$
- **Déformation dynamique** :
  - tenseur de Cauchy : $M\ddot{x} + C\dot{x} + K\Delta x = f$, système linéaire
  - tenseur de Green : $M\ddot{x} + C\dot{x} + F(x) = f$, système non-linéaire

Plan

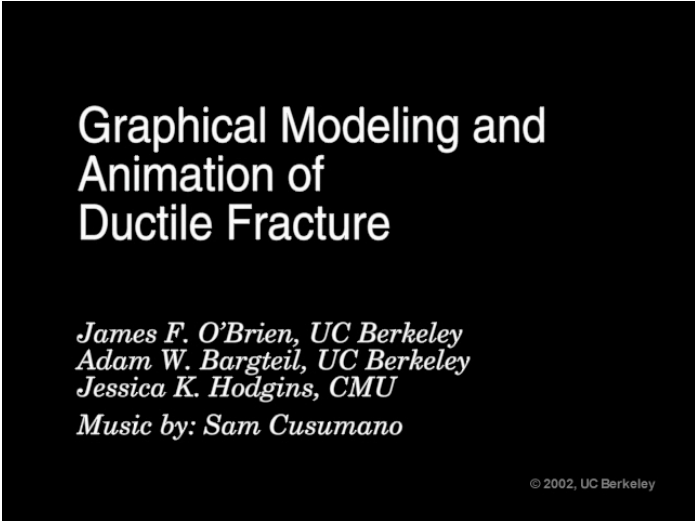
Tenseur de déformations

Muller et Gross 2004 - Interactive Virtual Materials



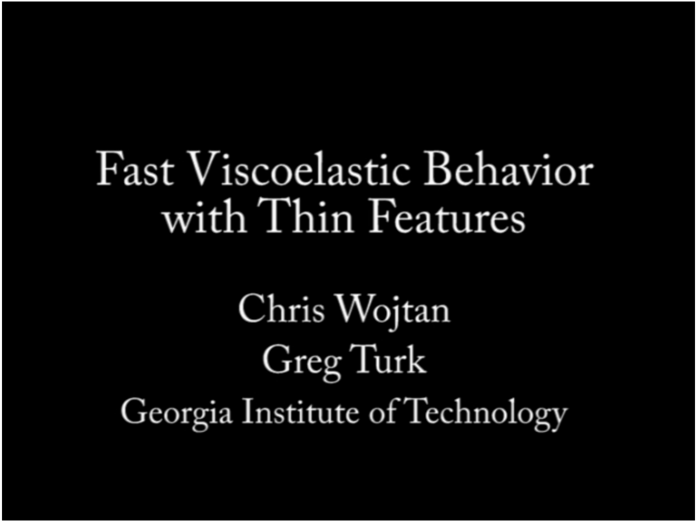
Cassures

O'Brien 2002 - Graphical Modeling and Animation of Ductile Fracture

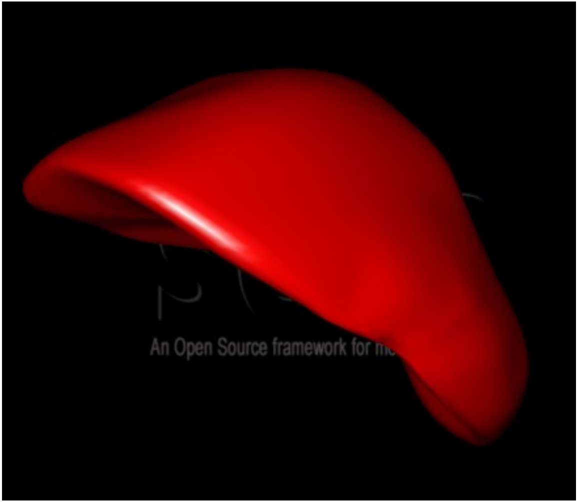


Déformations extrêmes

Wojtan et Turk 2008 - Fast Viscoelastic Behavior with Thin Features



Moteurs physiques



Plan

Conclusion

- **Physique du point** : pratique, multitudes d'applications, difficile de modéliser correctement (cf : Graphique 3D)
- **Physique du solide** : surtout pour objets articulés, en particulier squelettes d'animation (cf : cours contrôle)
- **Objets déformables** : permet de modéliser par des paramètres mesurables (Young, Poisson) des objets déformables
- **Questions ouvertes** : changements de topologies (simulateur de chirurgie)