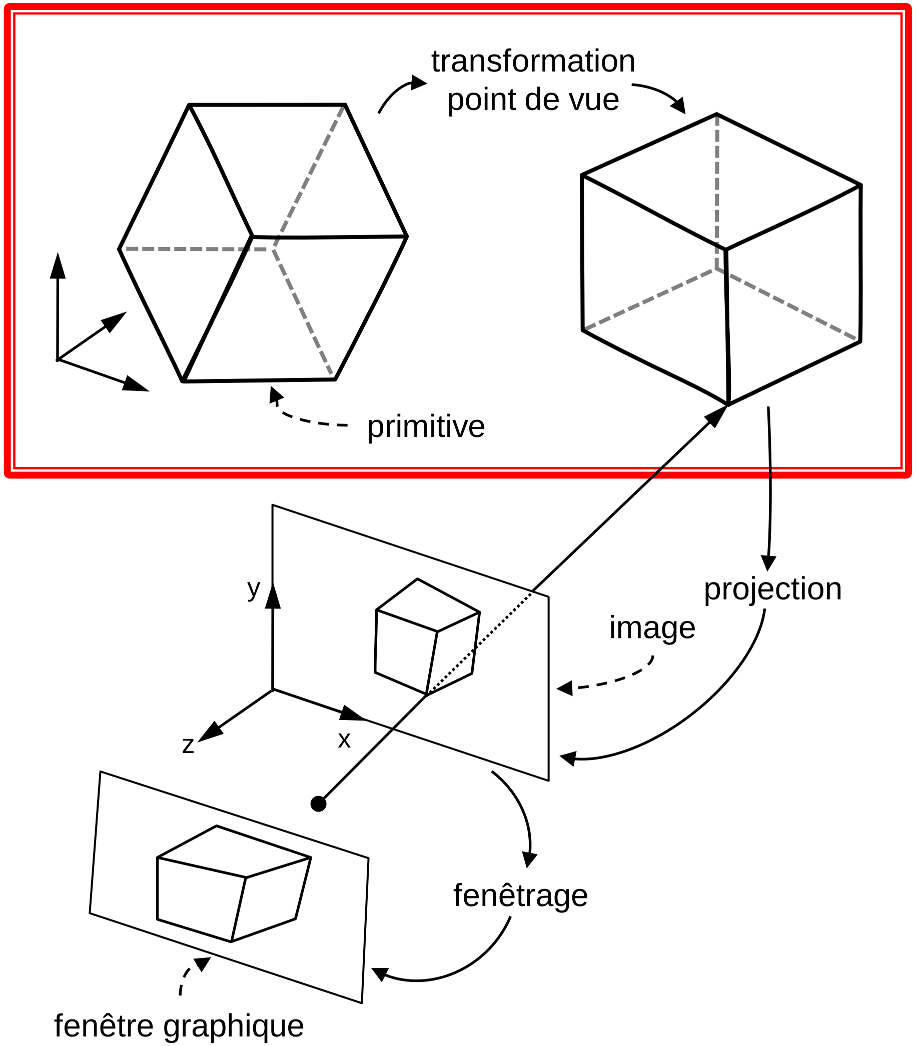
Les transformations

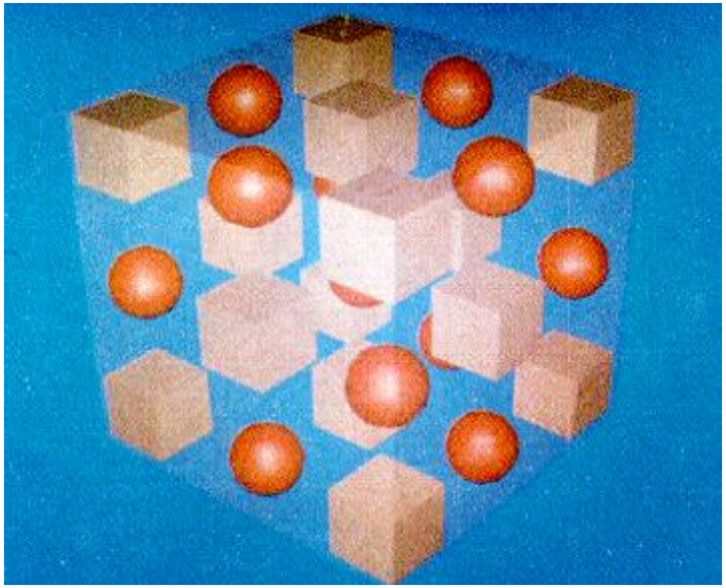
Transformations

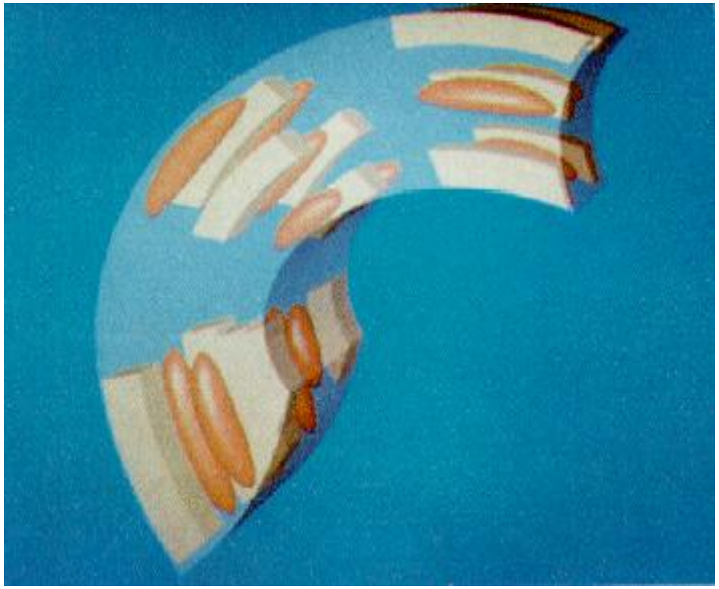


- Modeling Transformations
- Illumination (Shading)
- Viewing Transformation (Perspective / Orthographic)
- Clipping
- Projection (to Screen Space)
- Scan Conversion (Rasterization)
- Visibility / Display

Qu’est-ce qu’une transformation ?

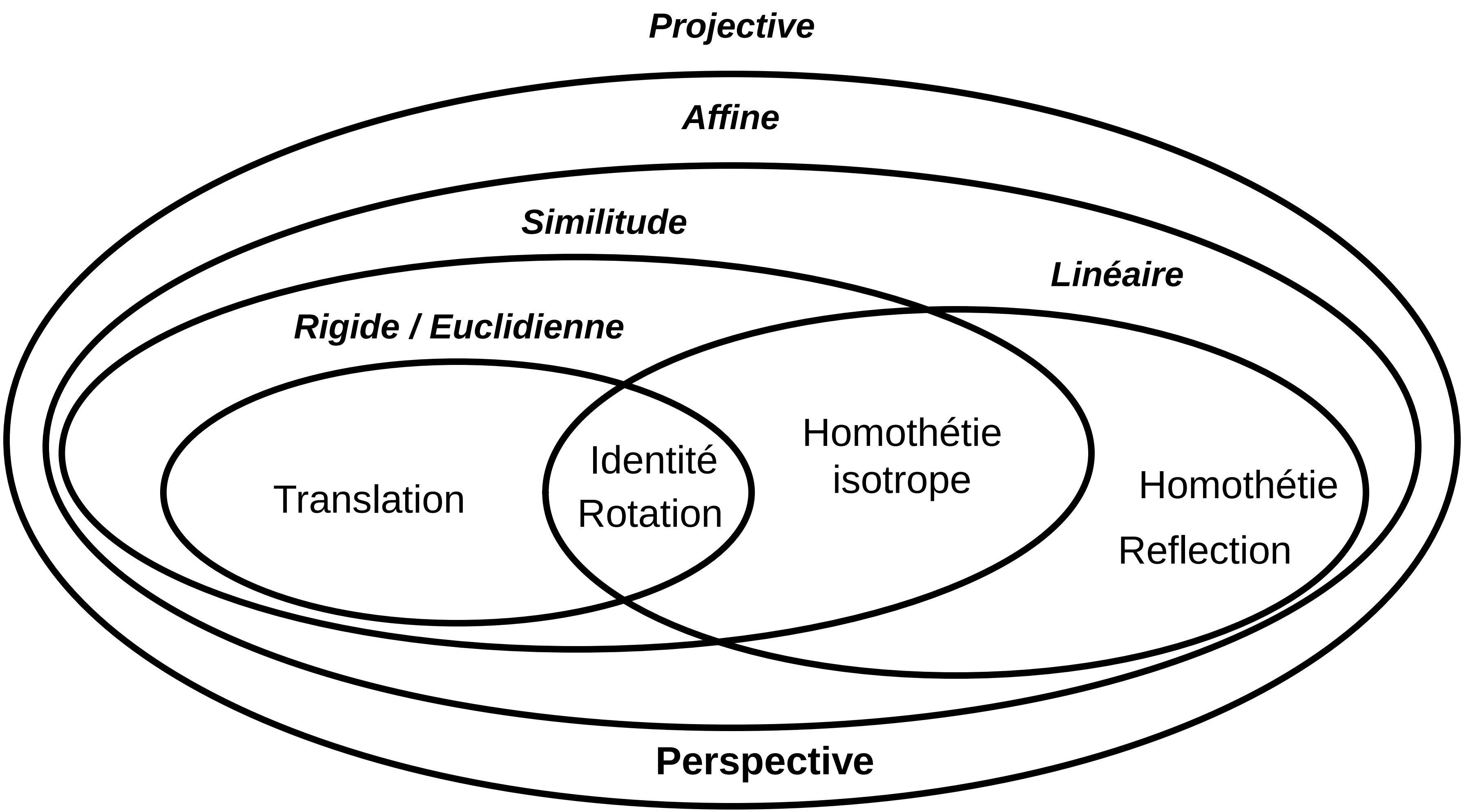
- Un fonction qui a un point x associe un point x’
  - Applications : animation, déformation, point de vue, ombres…





From Sederberg and Parry, SIGGRAPH 1986

Transformations



Coordonnée homogènes

- **Représentation matricielle** uniforme de tous les types de transformations

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

$$p' = \color{red}{M}\, p$$

Coordonnée homogènes

- La plupart du temps **w = 1**
- Si on multiplie un vecteur par une transformation affine w n'est pas modifié
- On divise par w pour revenir en cartésien

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Coordonnée homogènes

- Translations :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

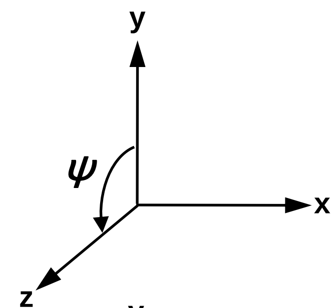
- Changements d'échelles :

$$S = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

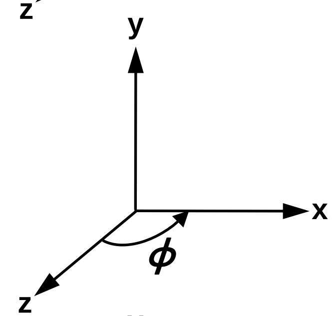
- Rotations représentées par les angles d'Euler :

$$\mathbf{R = R_z \,.\, R_y \,.\, R_x}$$

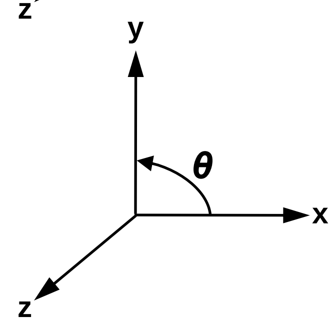
$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ 0 & \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$R_y = \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

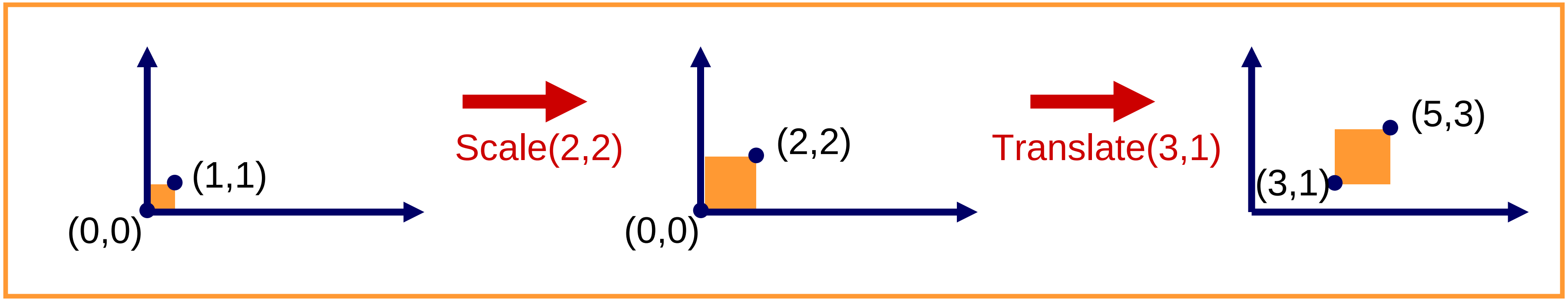


$$R_z = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

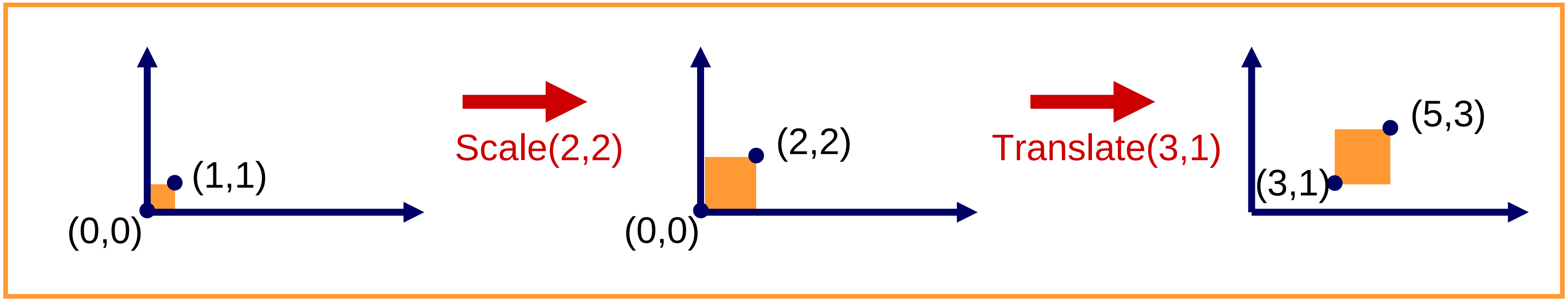


Composition

- **Multiplication de matrices**
- Question – 4mn :
  - Ecrire les matrices des deux transformations ci-dessous puis calculer la matrice composition
  - Que ce passe-t-il si on inverse la multiplication ?



Composition

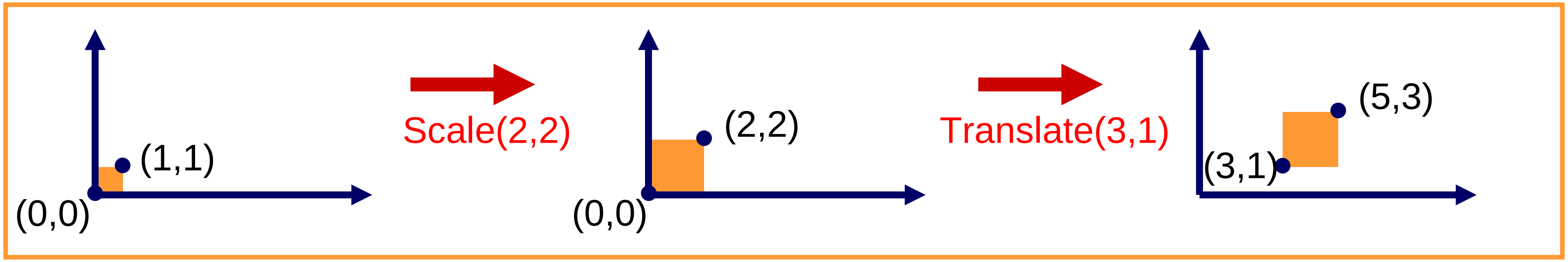


$$p' = T(S\,p) = TS\,p$$

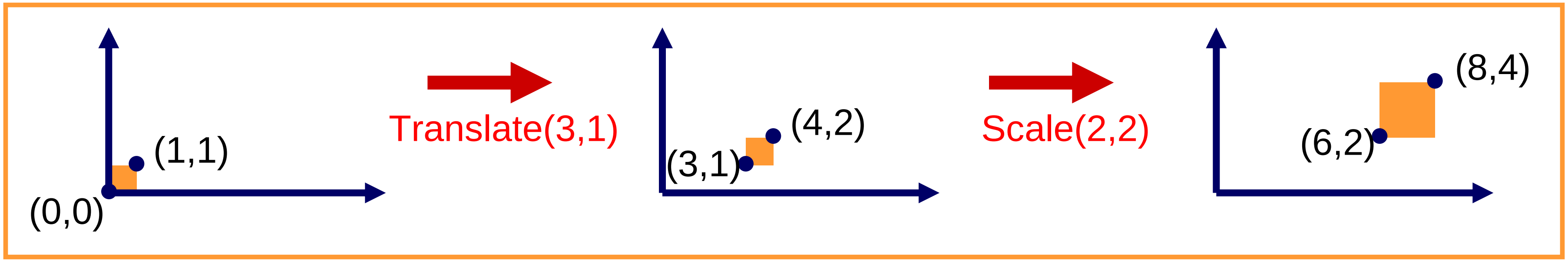
$$TS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Non-commutatif !!!

homothétie puis translation : $p' = T(Sp) = TSp$

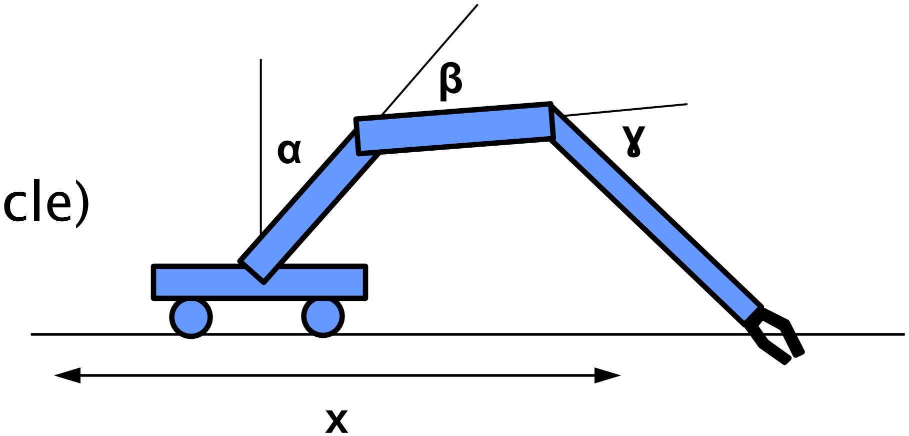


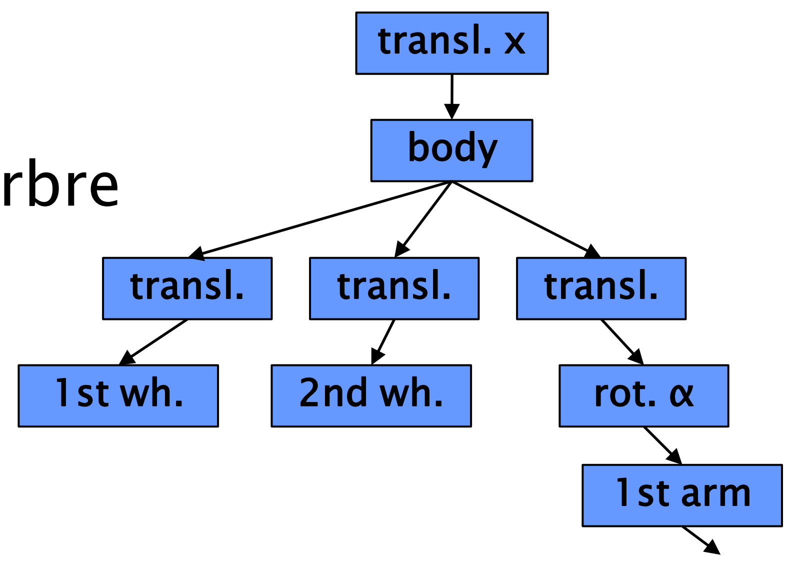
translation puis homothétie : $p' = S(Tp) = STp$



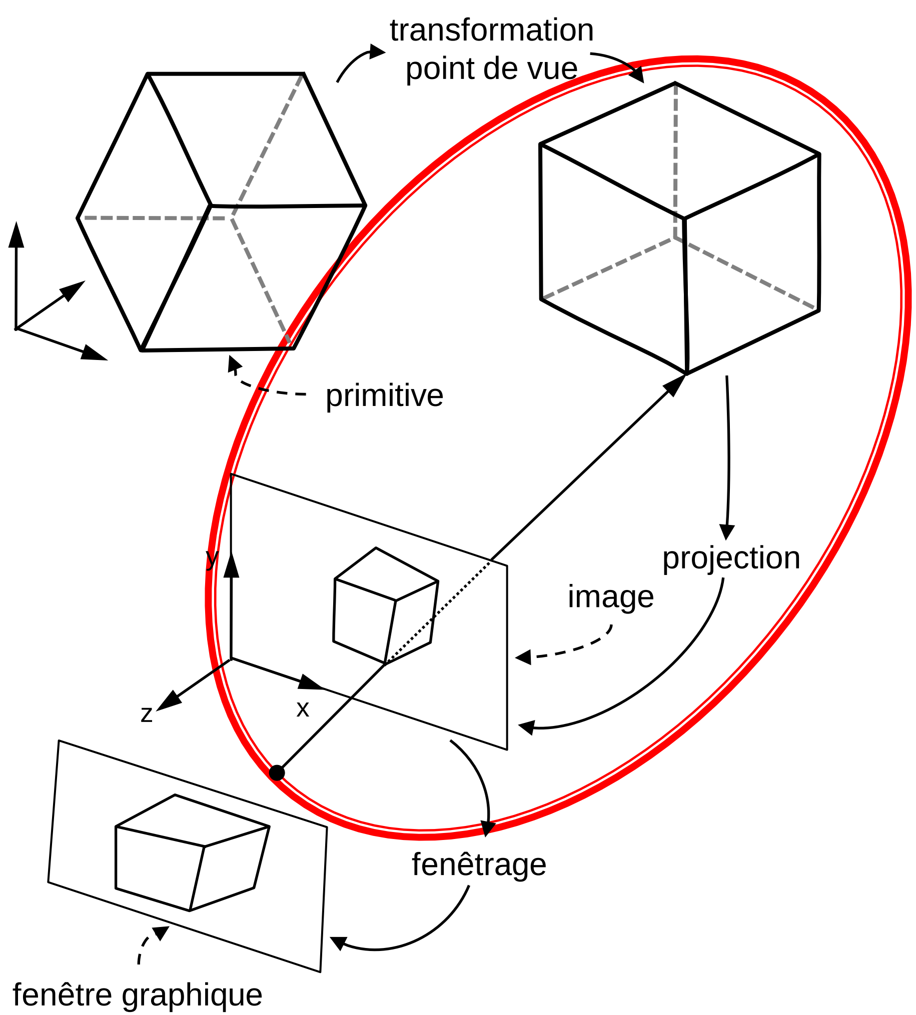
Hiérarchie de transformations

- Objet complexe
- Coordonnées relatives
  (ex : la roue par rapport au socle)
- Concaténation
  de transformations
- **Hiérarchie**
  - dessiner = parcourir un arbre
  - conserve la cohérence





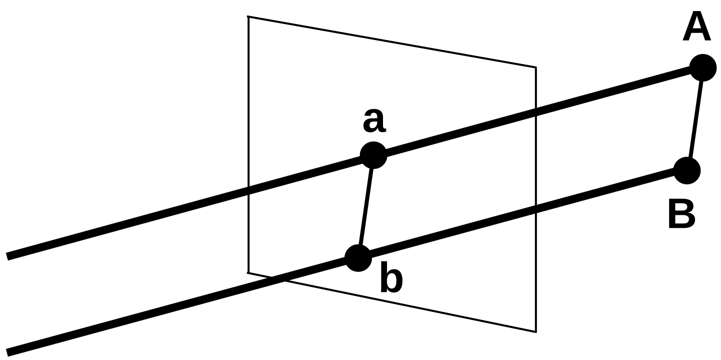
Projections



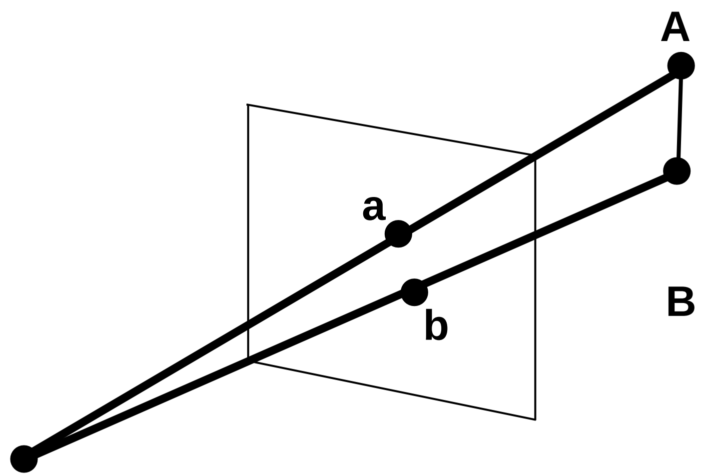
- Modeling Transformations
- Illumination (Shading)
- Viewing Transformation (Perspective / Orthographic)
- Clipping
- Projection (to Screen Space)
- Scan Conversion (Rasterization)
- Visibility / Display

Projections

- Utilisées en synthèse et en vision (modèles de caméras)
- Deux grandes familles :



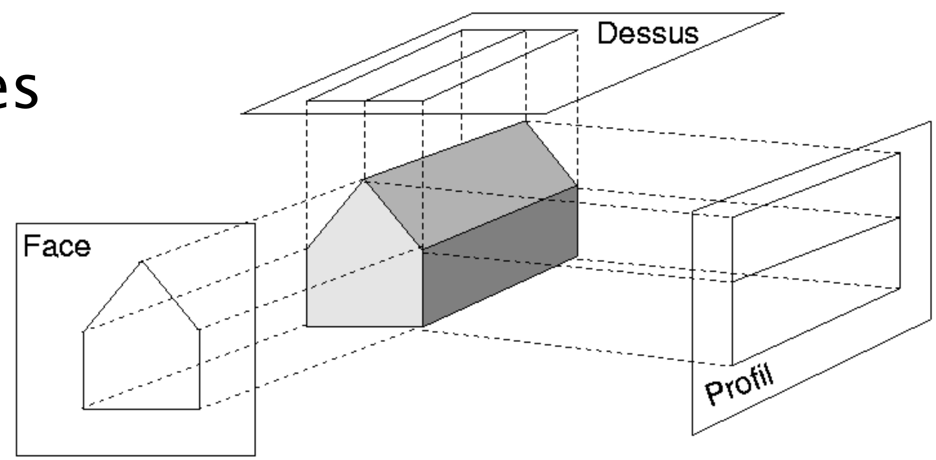
Projection parallèle



Projection perspective

Projections parallèle

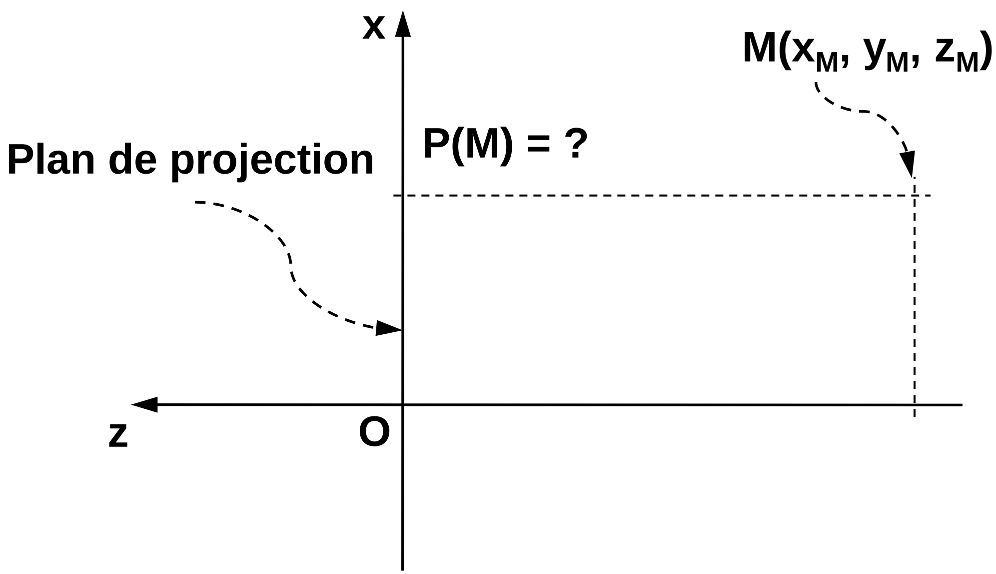
- Les **projections parallèles** :
  - **projection orthographique** lorsque la direction de projection est **perpendiculaire** au plan de projection
  - **projection oblique** sinon
- **Propriétés géométriques** des projections parallèles :
  - Les projections parallèles conservent le **parallélisme des droites**
  - Les projections parallèles conservent les **rapports des distances** selon une direction donnée



Projections parallèle

- Matrice en coordonnées homogènes de la projection orthographique canonique :

$$P(x_M, y_M, z_M, w_M) = ?$$



Matrice de la projection orthographique sur xOy

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} =$$

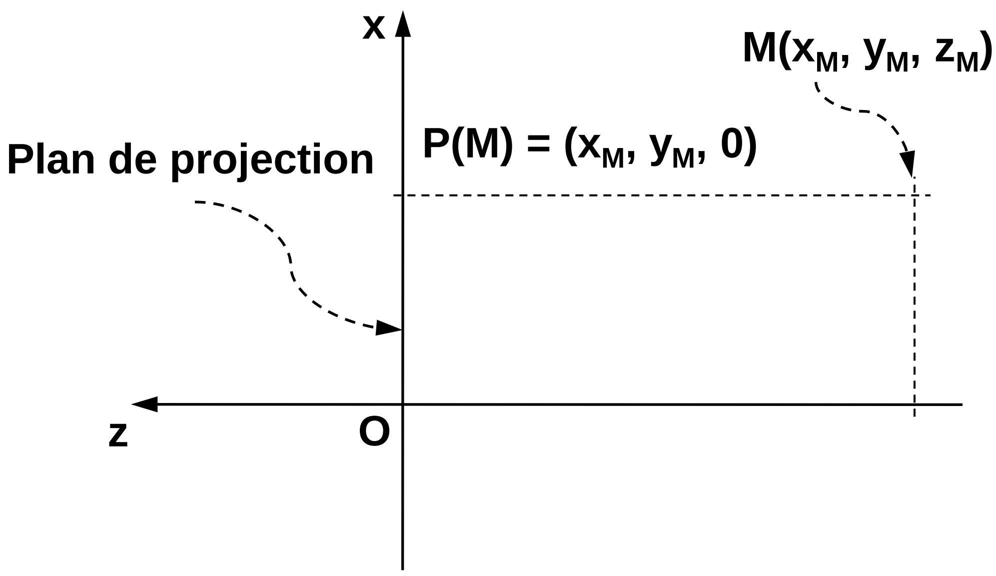
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

30s

Projections parallèle

- Matrice en coordonnées homogènes de la projection orthographique canonique :

$$P(x_M, y_M, z_M, w_M) = (x_M, y_M, 0, 1)$$



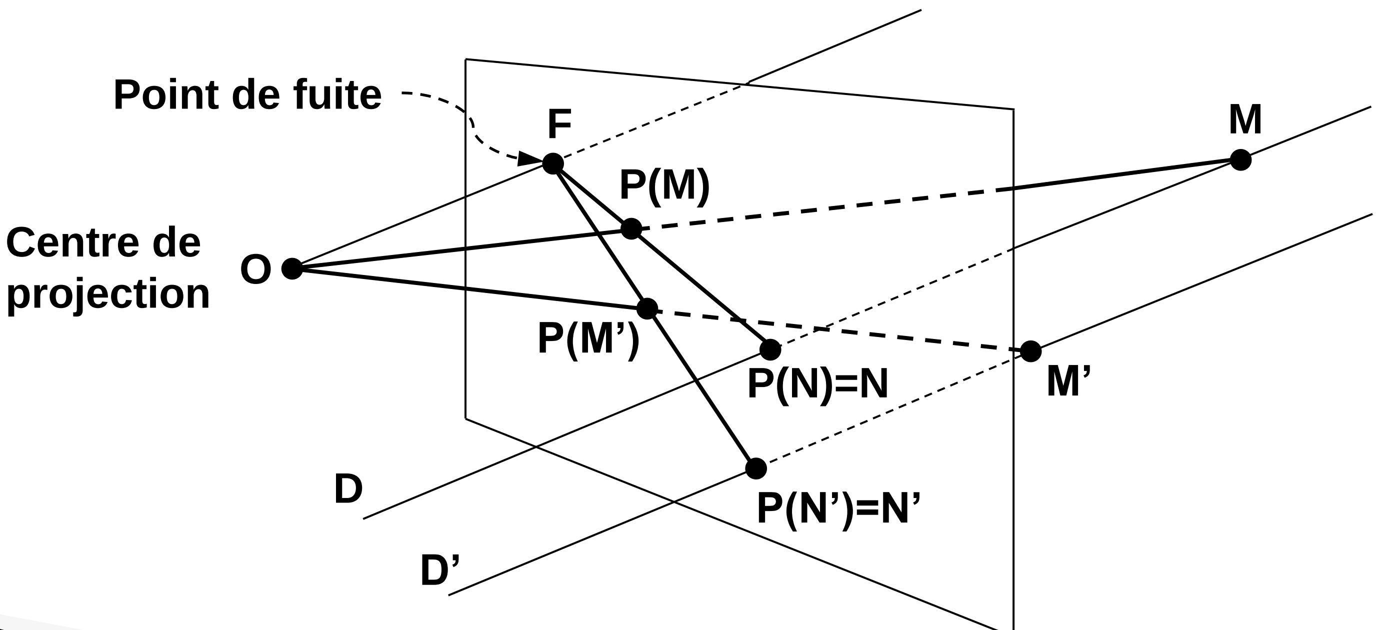
Matrice de la projection orthographique sur xOy

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

Projections perspectives

- L'image d'un point M par une projection en perspective sur le plan P de centre O est l'intersection de la droite OM avec le plan P.
- Une projection en perspective dont le centre de projection est à l'infini est une projection parallèle.

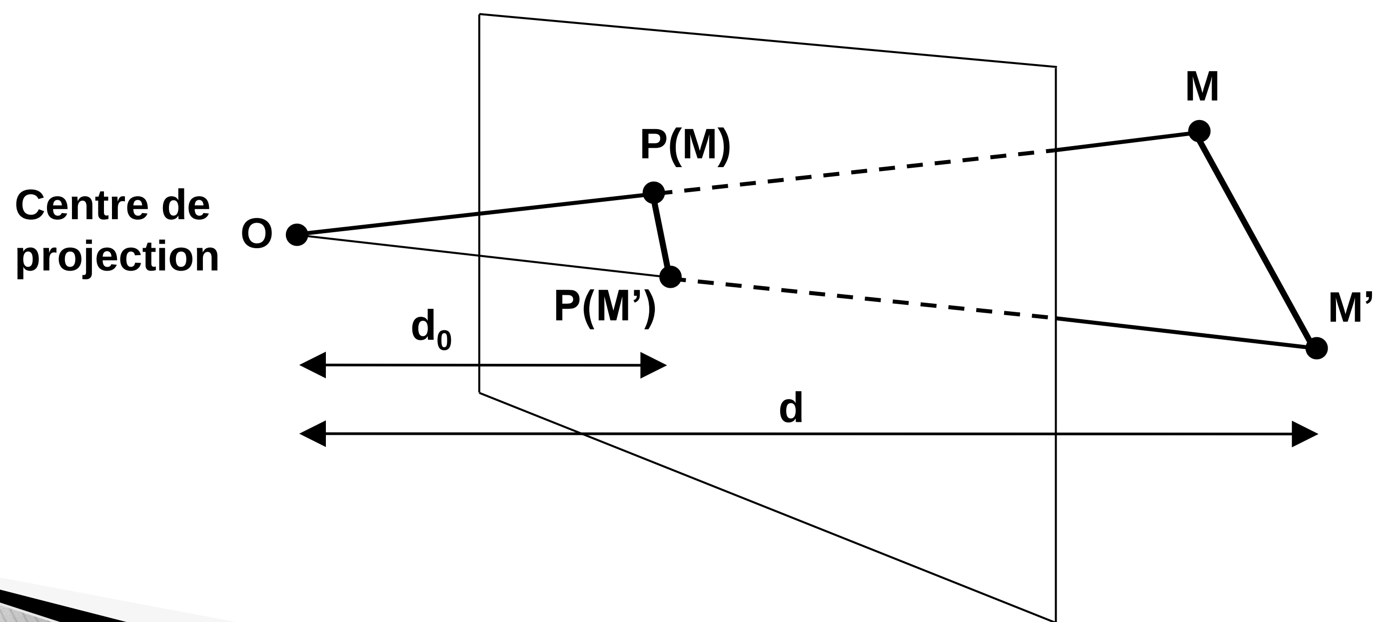
Projection en perspective de 2 droites parallèles



Projections perspectives

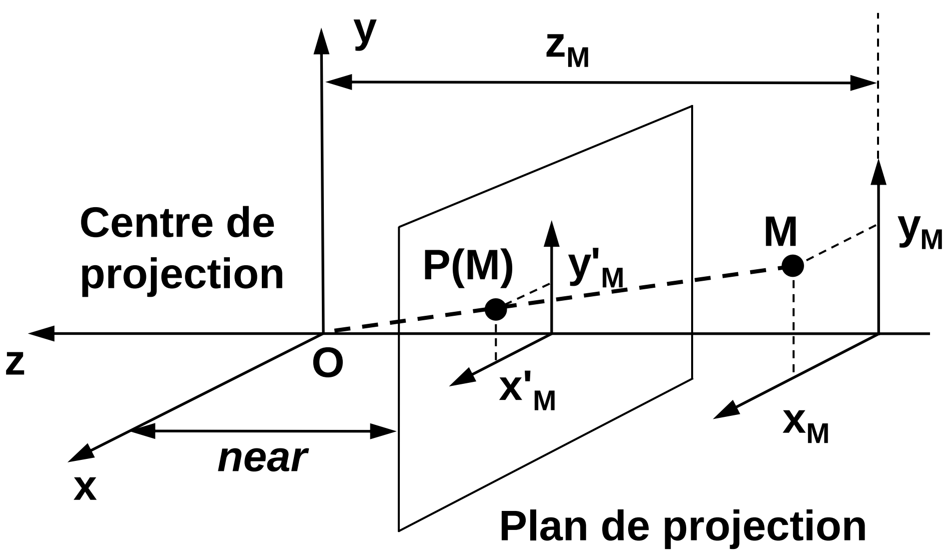
- **Propriétés géométriques** des projections en perspective
  - Les projections perspectives ne conservent pas le parallélisme des droites non parallèles au plan de projection.
  - La taille d'un objet est inversement proportionnelle à sa distance au point de projection :

$$|\mathbf{P(M)\ P(M')}| = d_0 / d\ .\ |\mathbf{MM'}|$$



Projections perspectives

- Calcul des coordonnées projetées en perspective
- On se place dans le cas d'une projection canonique :
  Centre de projection O et plan de projection parallèle à *x*O*y*.
- **Coordonnées dans le plan de projection**
  - $P(x_M, y_M) = ?$



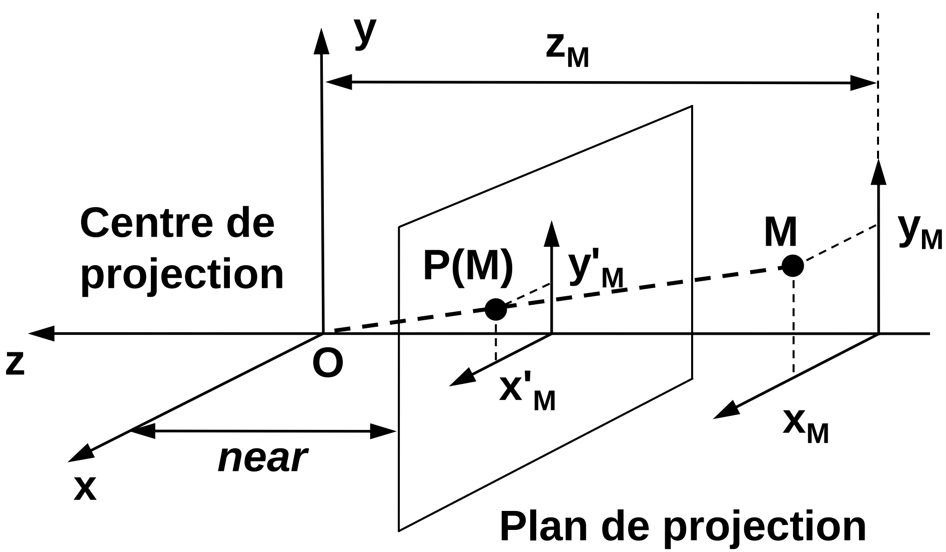
Matrice de la projection
de centre O sur le plan *z=near*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

45s

Projections perspectives

- Calcul des coordonnées projetées en perspective
- On se place dans le cas d'une projection canonique :
  Centre de projection O et plan de projection parallèle à xOy.
- **Coordonnées dans le plan de projection**
  - $P(x_M, y_M) = ((near\ .\ x_M) \,/\, (z_M), (near\ .\ y_M) \,/\, (z_M))$



Matrice de la projection de centre O sur le plan *z=near*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/near & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$