Partie 2
Animation

1. Animation par modèles descriptifs
2. **Animation par modèles générateurs**
   - Modèles physiques discrets et continus
   - Détection et traitement des collisions
3. Techniques de contrôle du mouvement

Modèles générateurs

Décrivent une *« famille de mouvements »*
- On définie des « lois du mouvement »
  - une procédure à exécuter (cf. exemples cours précédent)
  - **les lois de la physiques**
  - des lois comportementales (techniques de l'IA)
- Le système **engendre le mouvement et les déformations**

Dans ce cours
- Principaux modèles physiques utilisés en graphique
- Les interactions entre ces modèles (contacts, collisions…)

2

Modèles générateurs
Modèles physiques

- Modèle + conditions initiales + forces appliquées
  → mouvement

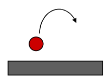
Aide au réalisme!
- utile lorsque la dynamique joue un grand rôle
- bien adapté aux objets inertes

Exemples :
- Corde lancée dans *Toy-Story 1*
- Boue / bière / lait dans *Shreck*

Modèles physiques de base

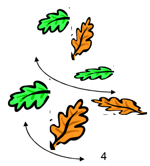
Physique du point

$\sum f = m\,a$



- Intégrer les équations du mouvement
  $v(t+dt) = v(t) + \sum f(t)/m \;\; dt$
  $x(t+dt) = x(t) + v(t)\, dt$ (Euler explicite)

- Exemples :
  - Feuilles mortes + primitives de vent
  - Billes, fumée, cascades…



4

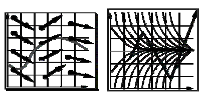
Attention à l'intégration!

$$\ddot{\mathbf{x}} = F(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) = \mathbf{f} / m$$
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}$$

$$\boxed{\dot{\mathbf{v}} = F(\mathbf{v}, \mathbf{x}, t)}$$

- Euler explicite

$$\mathbf{v}(t+\Delta t) = \mathbf{v}(t) + \Delta t\, F(\mathbf{v}(t), \mathbf{x}(t), t)$$
$$\mathbf{x}(t+\Delta t) = \mathbf{x}(t) + \Delta t\, \mathbf{v}(t)$$



- Euler implicite (schéma stable!)

$$\mathbf{v}(t+\Delta t) = \mathbf{v}(t) + \Delta t\, F(\mathbf{v}(t+\Delta t), \mathbf{x}(t+\Delta t), t)$$
$$\mathbf{x}(t+\Delta t) = \mathbf{x}(t) + \Delta t\, \mathbf{v}(t+\Delta t)$$

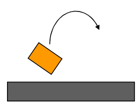
5

Modèles physiques de base

Physique du solide (I matrice d'inertie)

$\sum F = m\,a$

$\sum M = I\,\dot{\omega} + \omega \wedge I\,\omega$



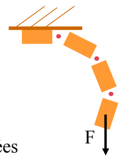
- Intégrer les forces et les moments
  - Matrice de rotation ? Ré-orthogonaliser
  - Vecteur rotation ? Petites rotations seulement!
  - Quaternions : OK, avec l'exponentielle de quaternions (!)

6

Modèles physiques avancés

Objets articulés

- Solution pour maintenir les contraintes aux joints?
  - Calcul exact pour les chaînes ouvertes
  - Multiplicateurs de Lagrange
  - Correction itérative des positions
  - Mettre des ressorts…
- Dynamique inverse
  - Certaines des accélérations sont spécifiées



7


Modèles physiques avancés
Objets déformables

Objets structurés	Objets non structurés
• Elasticité – loi contrainte/déformation – retour à l'équilibre • Visco-élasticité – vitesse de déformation • Fractures Ex : balle, drapeau, organe	– Les voisinages changent! • Plasticité – absorbe les déformations • Fluides – Navier-Stockes Ex : pâte à modeler, liquide, fumée...

8

Modèles physiques avancés
Objets déformables

Première approche : Simulation mécanique

- Partir d'une équation des milieux continus (EDP)
  - élasticité : loi d'Hooke
  - visco-élasticité, plasticité
  - fluides : Navier Stockes

[Terzopoulos 87]

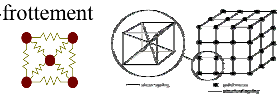
- Discrétiser par éléments finis ou différences finies
  - Simulation Eulérienne ou Lagrangienne

9

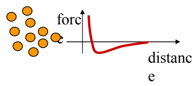
Modèles physiques avancés
Objets déformables

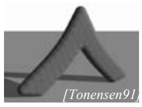
Seconde approche : combiner des composants simples

- Réseaux masses-ressorts-frottement



- Systèmes de particules
  - Forces d'attraction répulsion de « Lennard-Jones »

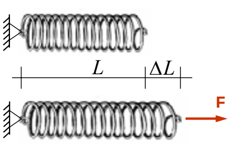




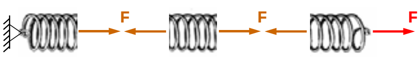
[Tonensen91]

[Desbrun98]

Un exemple : Objets élastiques
Contraintes et déformations (Stress and Strain)



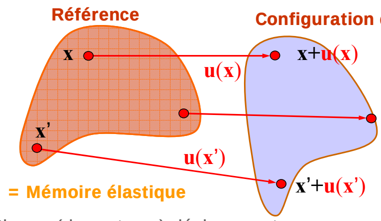
- Longueur L *au repos*
- Elongation ΔL, force externe F
  - F = k·ΔL
- Discretisation (couper en bouts) révèle les forces internes
  - F (= F)



Déformation ΔL / L [-]   Contrainte **F / A** [N/m²]

11

Champ de déplacement



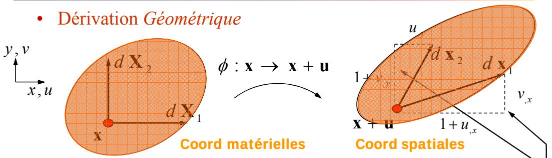
Champ (de vecteurs) déplacement

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = [\ u(x,y,z)\quad v(x,y,z)\quad w(x,y,z)\ ]^T$$

12

Mesurer la déformation ?

- Dérivation *Géométrique*



- Jacobian de ϕ donne le déplacement local

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \phi_i}{\partial \mathbf{x}_j} = \begin{bmatrix} (x+u)_{,x} & (x+u)_{,y} \\ (y+v)_{,x} & (y+v)_{,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{1+u_{,x}} & \boxed{u_{,y}} \\ \boxed{v_{,x}} & \boxed{1+v_{,y}} \end{bmatrix} = \mathrm{I} + \mathrm{grad(u)}$$

13

Tenseur de déformation de Green
Non linéaire!

Definition: variation du produit scalaire entre 2 vecteurs

$$\boxed{d\mathbf{x}_1{}^T d\mathbf{x}_2} - d\mathbf{X}_1{}^T d\mathbf{X}_2 = \boxed{(\mathbf{J}d\mathbf{X}_1)^T \mathbf{J}d\mathbf{X}_2} - d\mathbf{X}_1{}^T d\mathbf{X}_2$$

$$= d\mathbf{X}_1{}^T \boxed{(\mathbf{J}^T\mathbf{J} - \mathbf{I})} d\mathbf{X}_2$$

Tenseur de déformation de Green ε

Terme non linéaire

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{Green} = \nabla \mathbf{u}^T + (\nabla \mathbf{u}^T)^T + \boxed{\nabla \mathbf{u}^T (\nabla \mathbf{u}^T)^T}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_G = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\mathbf{x}_1{}^T d\mathbf{x}_1 & d\mathbf{x}_1{}^T d\mathbf{x}_2 \\ d\mathbf{x}_2{}^T d\mathbf{x}_1 & d\mathbf{x}_2{}^T d\mathbf{x}_2 \end{bmatrix} - \mathbf{I}$$

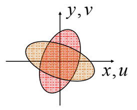
14

Tenseur de déformation de Cauchy
Version linéarisée!

- Négliger le terme quadratique pour de petits u(x)
  - Courant en ingénierie (déformation infinitésimale)

$$\varepsilon_{xx} = 2\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_{yy} = 2\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

- Gros problème après après une forte rotation!
  - Si la déformation tourne l'objet de 90°



$$u = -X - Y \qquad \qquad \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = -2$$
$$v = X - Y \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_{xy} = 0$$

15

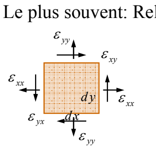
Tenseur linéaire de Cauchy

- [Müller and Gross 04] **Interactive Virtual Materials** (http://www.matthiasmüller.info)

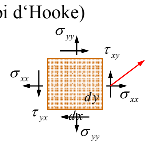
16

Loi contrainte - déformation

- Relation entre contrainte et déformation ?
  - Le plus souvent: Relation linéaire (loi d'Hooke)



$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon}$$



$$dy \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}$$

Module d'Young $E\left[N / mm^2\right]$

Shear Modulus $G = 0.5E/(1+\nu)$

17

Pour animer ?

Etant donné **u**(**x**) on peut calculer en tout point x

- déformation ε(**x**) et contrainte σ(**x**) = **E** ε(**x**)

→ Trouver **u**(**x**) tq σ(**x**) soit en équilibre avec **f**(**x**) partout

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}$$

- Equation statique (état d'équilibre)

$$\rho \ddot{\mathbf{x}} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{f}$$

- Equation dynamique (aller vers cet état)

18

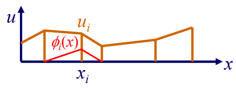
Discrétisation spatiale (éléments finis)

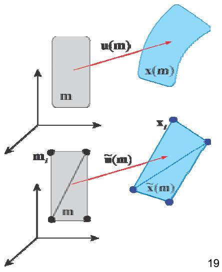
• Jusqu'à présent: champ continu

• Now: u_i connu à des positions x_i

inrterpoler $u(x)$ avec des fcts de base

$u(x) \approx \Sigma_i \, u_i \, \phi_i(x)$





19

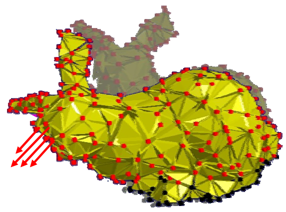
Déformation statique

$\mathbf{f}_{ext} = \mathbf{f}_{el} = \mathbf{K} \cdot \Delta\mathbf{x}$ **(Cauchy)**

$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{f}_{ext}$

- Système linéaire à résoudre

(i.e. Méthode du gradient conjugué)



$\mathbf{f}_{ext} = \mathbf{f}_{el} = \mathrm{F}(\mathbf{x})$ **(Green)**

$\mathbf{x} = \mathrm{F}^{-1}(\mathbf{f}_{ext})$

- Système non linéaire

(Newton-Raphson – méthode de newton généralisée)

20

Déformation dynamique (équation Lagrangienne du mouvement)

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\,\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\,\Delta\,\mathbf{x} = \mathbf{f}_{ext} \quad \textbf{(Cauchy)}$$

- Système couplé de $3n$ ODEs linéaires
- Intégration explicite: Facile!
- Intégration implicite : Inversion de matrice à chaque pas

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + F(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_{ext} \quad \textbf{(Green)}$$

- Système couplé de $3n$ ODEs **non**-linéaires
- Intégration explicite: Facile!
- Intégration implicite : linéariser puis inverser une matrice à chaque pas

$$F(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) \approx F(\mathbf{x}) + \frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Delta\mathbf{x} + O(\Delta\mathbf{x}^2)$$

21

Avancées récentes
Résolution statique temps-réel : ArtDefo

[James and Pai 99]

Premier modèle temps réel

- Ne calculer que les bords
- Gros pré-calcul
- Utiliser la cohérence temporelle pour ne pas tout recalculer lorsque les conditions au bord varient peu à peu

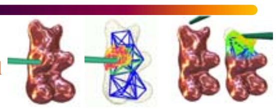
22

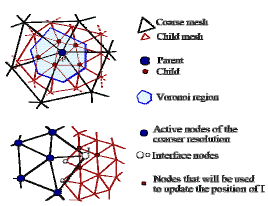
Avancées récentes
Simulation adaptative

[Debunne et al. 00, 01]

Premier modèle dynamique tps-réel

- Hiérarchie de maillages indépendants
- Utiliser localement la précision nécessaire
- Adaptation transparente à l'utilisateur
- Retour haptique





Avancées récentes
Materiaux virtuel interactifs

[Müller et al. 02, 04]

Cauchy dans un repère local!

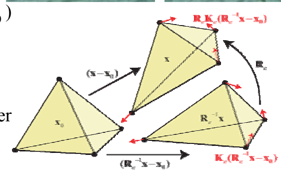
- A la place de $\mathbf{f} = \mathbf{K}\,\mathbf{u}$

Utiliser : $\mathbf{f} = \mathbf{R}\,\mathbf{K}\,(\mathbf{R}^T\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$

- Calculer les rot locales

$\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}$ (à chaque instant)

- Surface complexe déformée par un maillage assez grossier
- Fractures / plasticité



24

Avancées récentes
Eléments finis inversibles : très robuste!

[Irving et al. 04, 05]

- Tenseur de Green
  nul si un élément s'inverse!

- Traiter l'inversion explicitement
- Loi d'Hooke modifiée

25

Avancées récentes
Eléments finis inversibles : très robuste!

[Irving et al. 05]

26

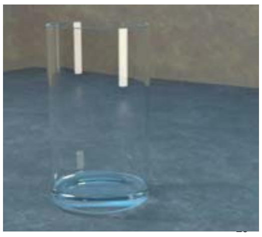
Avancées récentes
Objets qui se brisent: casser au lieu de déformer

[O'Brien]

Avancées récentes
Liquides : Navier stockes + "level set" (s. implicite)

[Foster & Fedkiw 2001]

[Enright et al. 2002]



Avancées récentes
Objet qui fond

[Carlson et al. 2002]

- Faire varier la viscosité
  - Objet solide approché par un fluide très visqueux
  - Viscosité couplée à la température (décroit)
- Intégration implicite
  pour diffuser la chaleur

29

Avancées récentes
Animer le sable comme un fluide

[Zhu and Bridson 05]

- Sable traité comme un continuum
  - Navier-Stokes modifié
  - Forces de frottement spécifiques

30